

Guía de Problemas

23 de agosto de 2024

1. Sistema solar

Ejercicio 1.1. *El período sinódico* El planeta Saturno se encuentra en oposición con la Tierra cada 378,1 días.

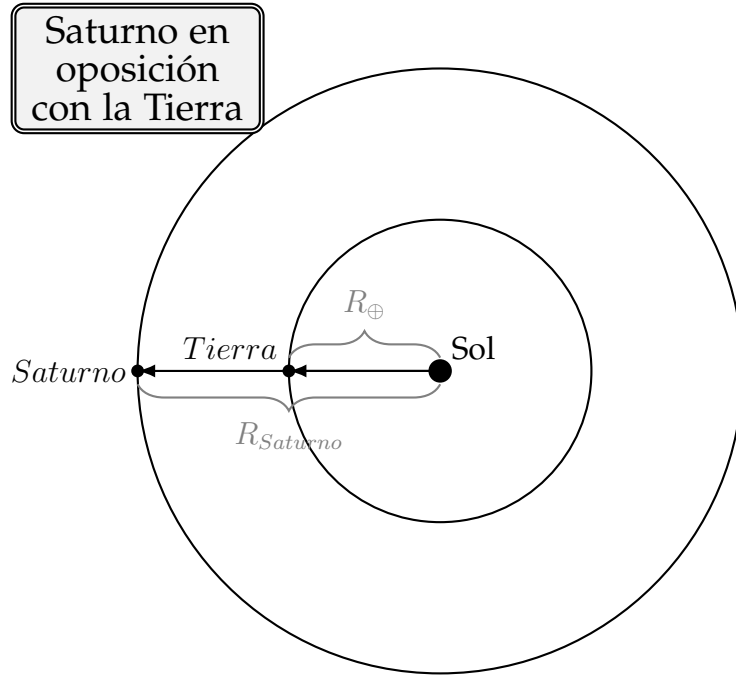
a) Calcular el período orbital de Saturno alrededor del Sol.

b) Calcular el semieje mayor de Saturno. Expresar el resultado en unidades astronómicas.

Datos: $M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$; $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$; 1 año = 365,25 días ; 1 UA = $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

Resolución:

El tiempo que demora un cuerpo celeste en volver a estar en la misma configuración planetaria se denomina período sinódico (T_{sin}). Por ejemplo, si tomamos la Luna, nos estamos refiriendo al tiempo entre una Luna llena y la siguiente, el cual es, aproximadamente, 29,5 días. Para los planetas, se suele utilizar el concepto de ‘oposición’ que corresponde al momento en donde se encuentran a la menor distancia de la Tierra. Por ejemplo:



Medir el tiempo entre 2 oposiciones consecutivas de un planeta nos permite encontrar el tiempo que demora dicho planeta en completar una vuelta al Sol. Este tiempo se lo denomina simplemente 'período' (T).

La fórmula que relaciona ambos conceptos depende de que planeta estemos considerando. Para los **planetas inferiores**, es decir, cuya órbita es más pequeña que la órbita de la Tierra, y posiblemente en este punto estén adivinando que se trata de Mercurio y Venus, tenemos la siguiente relación:

$$\frac{1}{T_{sin}} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{Tierra}} \quad (1.1)$$

Para los **planetas superiores**, es decir, aquellos cuya órbita es más grande que la órbita de la Tierra (Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno), la relación es la siguiente:

$$\frac{1}{T_{sin}} = \frac{1}{T_{Tierra}} - \frac{1}{T} \quad (1.2)$$

En donde, T_{sin} es el período sinódico del planeta que estemos considerando y T es el período orbital del mismo planeta.

Por lo tanto, para nuestro problema vamos a estar usando la ecuación 1.2 ya que Saturno es un planeta superior.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{378,1 \text{ días}} &= \frac{1}{365,25 \text{ días}} - \frac{1}{T} \\ \frac{1}{T} &= \frac{1}{365,25 \text{ días}} - \frac{1}{378,1 \text{ días}} \\ T &= 10747,16 \text{ días} \\ T &= 29,42 \text{ años}\end{aligned}$$

Rta. a) El período orbital de Saturno es de 29,42 años.

Parte b)

Para calcular el semieje mayor de Saturno, es decir, la distancia promedio de Saturno al Sol, vamos a utilizar la **tercera ley de Kepler**:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \times M_{\odot}}{4\pi^2} \quad (1.3)$$

En donde, a es el semieje mayor de la órbita, T es el período, G es la constante de gravitación universal y $M_{\odot}$ es la masa del Sol.

Reemplazamos por los datos que tenemos en el enunciado y dejamos todo expresado en unidades coherentes (metros, kilogramos, segundos). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{T^2} &= \frac{G \times M_{\odot}}{4\pi^2} \\ \frac{a^3}{(10747,16 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ seg})^2} &= \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \times 2 \times 10^{30} \text{ kg}}{4\pi^2} \\ a^3 &= 2,9135 \cdot 10^{36} \text{ m}^3 \\ a &= 1,4282 \cdot 10^{12} \\ a &= 9,52 \text{ UA}\end{aligned}$$

Rta. b) Saturno tiene una distancia promedio (semieje mayor) al Sol de 9,52 UA



Ejercicio 1.2. El planeta Marte tiene un diámetro de 6779 km y una masa de $6.39 \cdot 10^{23} \text{ kg}$.
a) Calcule el valor de la aceleración de la gravedad sobre la superficie de Marte sabiendo que $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$
b) Calcule el tiempo que tardaría una pelota en tocar la superficie de Marte si se la suelta desde 10 metros de altura con velocidad inicial nula.

Resolución:

a) Para resolver este ítem debemos recordar la segunda ley de Newton y su ley de gravedad.

Por un lado, la segunda ley de Newton nos dice que cómo se acelera un cuerpo ante la presencia de fuerzas. Esta ley se puede escribir como

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}$$

, donde m es la masa de un objeto, $\vec{a}$ su aceleración y $\sum \vec{F}$ la suma de todas las fuerzas que actúan sobre este.

Por otro lado, la fuerza de la gravedad tiene una fórmula explícita, la cual, en módulo, es:

$$F = G \frac{m \cdot M}{R^2}$$

donde m y M son las masas de los dos cuerpos que interactúan, R la distancia entre ellos y G la constante de gravitación universal.

Para hallar la aceleración gravitatoria sobre la superficie de Marte, supongamos un objeto de masa m apoyado sobre esta. La única fuerza que actúa sobre este será entonces la fuerza gravitatoria. Por lo tanto, podemos hallar el módulo de la aceleración reemplazando esta fuerza en la segunda ley de Newton (y tomando módulo):

$$m \cdot a = \sum F = G \frac{m \cdot M}{R^2}$$

De donde despejamos que

$$a = G \frac{M}{R^2}$$

Notar, antes de reemplazar, que la aceleración no depende de la masa del objeto. Es por esto que todos objetos caen a la misma velocidad¹. Luego, sabiendo que la distancia que separa al objeto de Marte es el radio del planeta (atentos a que el dato que nos dan el diámetro) y pasando este a metros (ya que G está en esas unidades), obtenemos que:

$$a = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{6,39 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{\left(\frac{6779000}{2} \text{ m}\right)^2} \approx 3,71 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Esta aceleración habitualmente es denominada por la letra 'g'.

b) Sabiendo que la una pelota en la superficie de Marte siente una aceleración constante (la aceleración gravitatoria g), debemos plantear la ecuación de MRUV para esta. Es muy importante primero definir un sistema de referencia. Para eso, tomo el sistema de referencia de la figura 1.1, en donde el la posición $y = 0$ corresponde a la superficie, y_0 a la altura inicial de 10 m y g a la aceleración gravitatoria hallada en a).

¹https://www.youtube.com/watch?v=EcGxFvOoUTU&ab_channel=PauloFlores

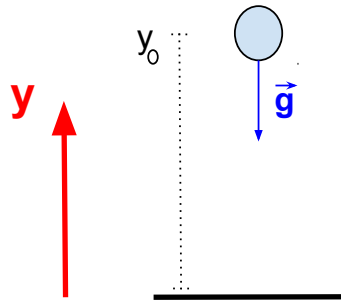


Figura 1.1: Sistema de coordenadas utilizado para describir la posición de la pelota.

Ahora, solo queda plantear la ecuación para la posición en función del tiempo de un MRUV. La fórmula general es

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Donde y_0 y v_0 son la posición y velocidad inicial de la pelota y a su aceleración. En nuestro caso, la pelota es soltada desde una altura de 10 metros con velocidad inicial nula, por lo que $y_0 = 10m$ y $v_0 = 0$. Con respecto a la aceleración, que llamamos $\vec{g}$ en este ejercicio, es importante notar que la misma va en sentido contrario al eje de coordenadas utilizado (que crece hacia arriba en la figura 1.1), por lo que la aceleración tiene un signo menos. Reemplazando todo, obtenemos que

$$y(t) = 10m + \frac{1}{2} \cdot \left(-3,71 \frac{m}{s^2}\right) \cdot t^2$$

Como nos piden el tiempo que tarda en tocar la superficie, pido que $y(t) = 0$, de donde se obtiene que

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 10m}{3,71 \frac{m}{s^2}}} \approx 2,3s$$



Ejercicio 1.3. La velocidad de escape es la velocidad que debe adquirir un cuerpo -por ejemplo, un cohete o un asteroide- para escapar de la atracción gravitatoria generada por otro cuerpo masivo, como puede serlo un planeta.

Podemos calcular la velocidad de escape a partir de la siguiente expresión:

$$V_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{d}}$$

donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa del cuerpo masivo que ejerce la atracción gravitatoria y d la distancia entre el centro de masa del cuerpo masivo y el objeto que escapa.

- a) Calcule la velocidad inicial necesaria para que un cohete lanzado desde la superficie terrestre logre escapar de la atracción gravitatoria de la Tierra. Considere a la Tierra una esfera y que su masa está distribuida homogéneamente.
- b) ¿La velocidad de escape del cohete depende de la dirección con la que es lanzado? ¿Por qué?

Datos: $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$, $R_T = 6378 \text{ km}$, $M_T = 5,9 \times 10^{24} \text{ kg}$.

Resolución:

a) Queremos calcular la velocidad que necesitamos entregarle al cohete para que escape de la atracción gravitatoria, es decir, queremos encontrar la velocidad de escape. Para eso, utilizamos la expresión presentada en el ejercicio y reemplazamos el valor de M por la masa de la Tierra y el de d por el radio terrestre, ya que esta es la distancia entre el cohete y el centro de la Tierra, desde donde ejerce la fuerza gravitatoria.

Completamos la expresión con los datos del problema:

$$V_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Antes de poner los datos en la fórmula hay que prestar atención a las unidades. La constante de gravitación universal G está en $\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$, mientras que el radio terrestre está en km . Pasamos el radio terrestre a metros:

Como $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$

$$R_T = 6378 \text{ km} = 6378 \cdot 1000 \text{ m} = 6,378 \times 10^6 \text{ m}$$

Ahora sí, escribimos los valores en la fórmula como lo pondríamos en la calculadora:

$$V_{esc} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5,9 \times 10^{24} \text{ kg}}{6,378 \times 10^6 \text{ m}}} \approx 10807,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Para interpretarlo más fácilmente, podemos pasar el resultado a unidades de kilómetros sobre segundo:

$$V_{esc} \approx 10807,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 10,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

b) Pensemos qué implica que una velocidad dependa de la dirección. Lo que nos indica con qué dirección se lanza el cohete es el ángulo: si se lanza con un ángulo de 90° el cohete sale vertical; si el ángulo es de 0° , sale tangencial. Sin embargo, en la fórmula de la velocidad de escape no hay un término relacionado con el ángulo con el que es lanzado el cohete, es decir, la velocidad de escape calculada no depende de la dirección.

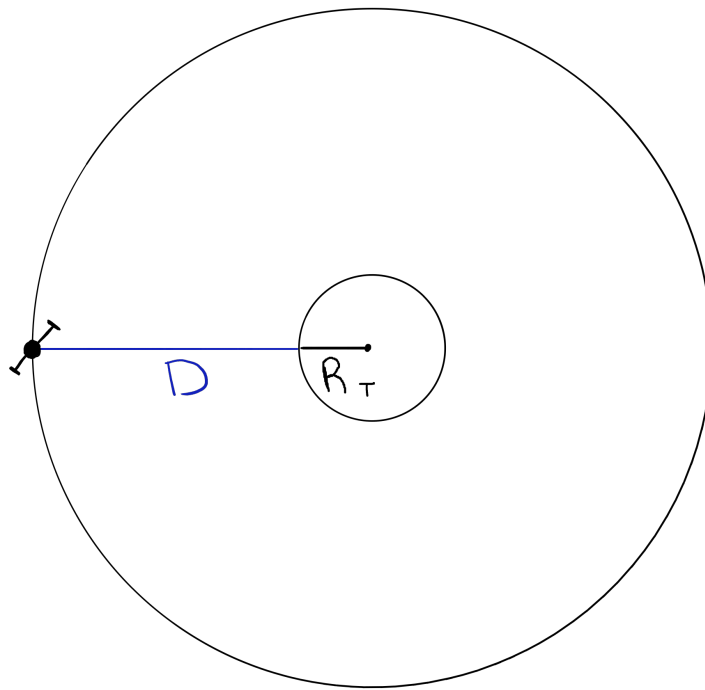


Ejercicio 1.4. *Un satélite geoestacionario es aquel que permanece fijo en el cielo para un observador en la Tierra. Para que esto suceda, su período debe ser el mismo que el de rotación de la Tierra y debe orbitar en el plano del Ecuador con una órbita circular. Sabiendo que la masa de la Tierra es $5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$ y su período de rotación es $23^h 56^{min} 4^s$, calcular la distancia a la superficie terrestre que tendríamos que ubicar un satélite para que sea geoestacionario.*

Datos: $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$, $R_{Tierra} = 6378 \text{ km}$.

Resolución:

Hagamos un dibujo de la situación:



Nuestro objetivo es calcular el valor de la distancia D a la superficie terrestre que marcamos en la figura para el cual el período del mismo sea $23^h 56^{min} 4^s$. Recordemos la tercera ley de Kepler:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_{\oplus} + m_{sat})}{4\pi^2} \quad (1.4)$$

Donde:

- a es el radio de la órbita.
- T es el período.
- $M_{\oplus}$ la masa de la Tierra ² y m_{sat} la masa del satélite.
- G es la constante de gravitación universal que nos da como dato el ejercicio.

Como la constante de gravitación universal está dada en metros, kilogramos y segundos, expresaremos cada uno de nuestros parámetros en esas unidades.

- El radio a de la órbita es la distancia del satélite al centro de la Tierra, y por el dibujo que hicimos $a = D + 6378 \text{ km} = D + 6,378 \times 10^6 \text{ m}$.
- El período es $T = 23^h \times 60 \frac{min}{h} \times 60 \frac{s}{min} + 56^{min} \times 60 \frac{s}{min} + 4s = 86164 \text{ s}$.

²El símbolo $\oplus$ suele utilizarse para referirse a la Tierra.

- La masa de la Tierra ya nos la dieron en las unidades que queremos: $M_{Tierra} = 5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$. La masa del satélite no nos la dan, pero pensemos lo siguiente: la Estación Espacial Internacional tiene una masa de unos 420000 kg [3]. Si prueban sumar en la calculadora $5,972 \times 10^{24} + 420000$ les va a arrojar como resultado $5,972 \times 10^{24}$. Eso se debe a que la **masa de un satélite es muy pequeña en comparación a la de la Tierra**. Es por ello que **despreciamos la masa del satélite** y tomamos $M_{Tierra} + m_{sat} \approx M_{Tierra} = 5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$.

Reemplazamos todos estos datos en la **Ecuación 1.4**:

$$\frac{(D + 6,378 \times 10^6 \text{ m})^3}{(86164 \text{ s})^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cancel{\text{kg}}^{-1} \text{ s}^{-2} \times 5,972 \times 10^{24} \cancel{\text{kg}}}{4\pi^2} \approx \frac{3,98 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}}{4\pi^2} \approx 1 \times 10^{13} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

Multiplicando en ambos miembros de la ecuación por $(86164 \text{ s})^2$:

$$(D + 6,378 \times 10^6 \text{ m})^3 = 1 \times 10^{13} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \times (86164 \text{ s})^2 \approx 7,42 \times 10^{22} \text{ m}^3$$

Tomando raíz cúbica:

$$D + 6,378 \times 10^6 \text{ m} = \sqrt[3]{7,42 \times 10^{22} \text{ m}^3} \approx 42 \times 10^6 \text{ m}$$

Finalmente, restamos en ambos miembros $6,378 \times 10^6 \text{ m}$ y tenemos nuestra respuesta:

$$D = 35,622 \times 10^6 \text{ m}$$



³Fuente: <https://www.nasa.gov/international-space-station/space-station-facts-and-figures/>

2. Coordenadas y tiempo

Ejercicio 2.1. Ubicar en una esfera celeste los siguientes astros en su culminación superior e inferior para un observador ubicado en la latitud $34,5^\circ S$, indicando los siguientes elementos: *horizonte, cenit, ecuador celeste, polos celestes, meridiano del lugar, la declinación del astro y la altura.* Además, calcular el valor de la altura en cada culminación.

a) Acrux: $\delta = -63^\circ$.

b) Betelgeuse: $\delta = +7^\circ$.

c) Polaris: $\delta = +89^\circ$.

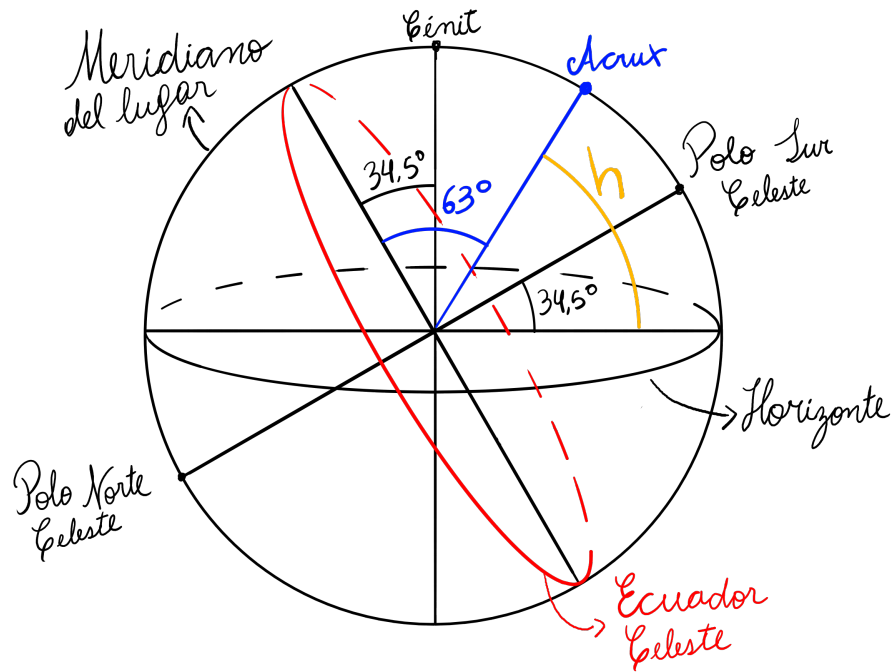
d) Antares: $\delta = -26,5^\circ$

Nota: la letra δ se usa para la declinación de cada estrella.

Resolución:

Daremos como ejemplo el a) y el b) y dejamos el resto para que los hagan ustedes.

a) Como nuestro observador se ubica en la latitud $34,5^\circ S$, el polo celeste elevado será el Polo Sur Celeste, a una altura de $34,5^\circ$. Sabemos además que las culminaciones se producen en el Meridiano del Lugar. Entonces para la culminación superior de Acrux la esfera celeste que nos piden es la siguiente:



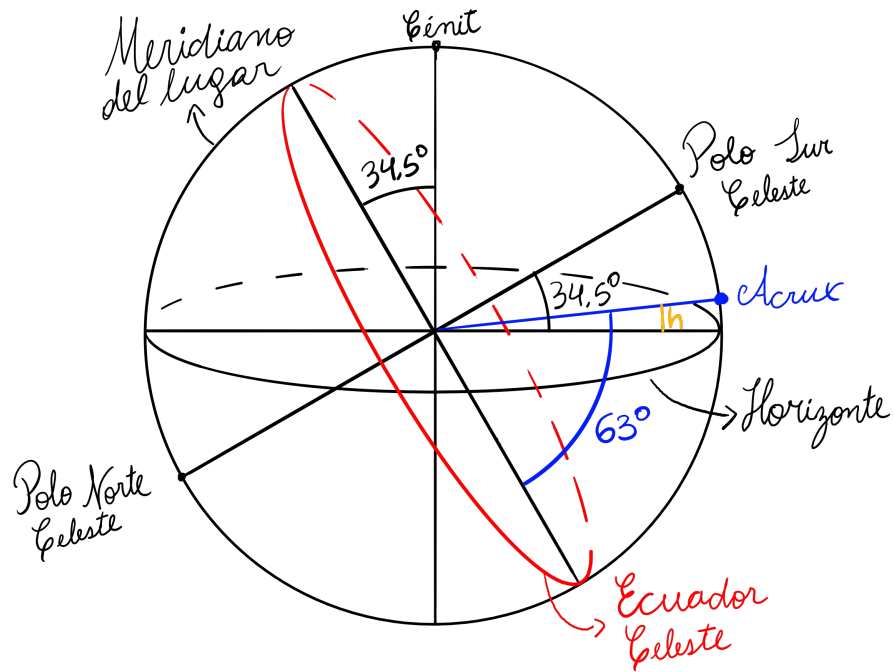
En el dibujo, h es la altura de Acrux en su culminación superior. Además, como el cénit y el horizonte forman un ángulo de 90° , vale la siguiente igualdad:

$$63^\circ + h = 34,5^\circ + 90^\circ = 124,5^\circ$$

Restando 63° en ambos miembros, tenemos la altura de Acrux en la culminación superior:

$$h = 61,5^\circ$$

Para la culminación inferior, tenemos que ubicar a Acrux también en el Meridiano del Lugar, pero en el punto de menor altura:



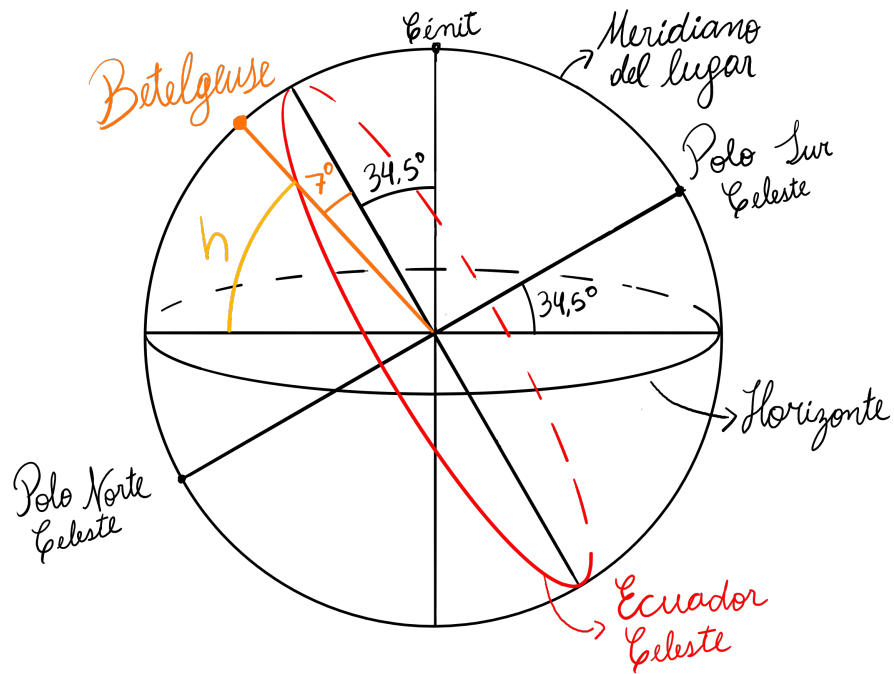
Como el Polo Sur Celeste está a 90° del Ecuador Celeste, vale la siguiente relación:

$$34,5^\circ - h = 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$$

Despejando, tenemos que la altura de la culminación inferior de Acrux es

$$h = 7,5^\circ$$

b) Nuevamente, el polo celeste elevado será el Polo Sur Celeste y su altura de $34,5^\circ$. Entonces para la culminación superior de Betelgeuse la esfera celeste que nos piden es la siguiente:



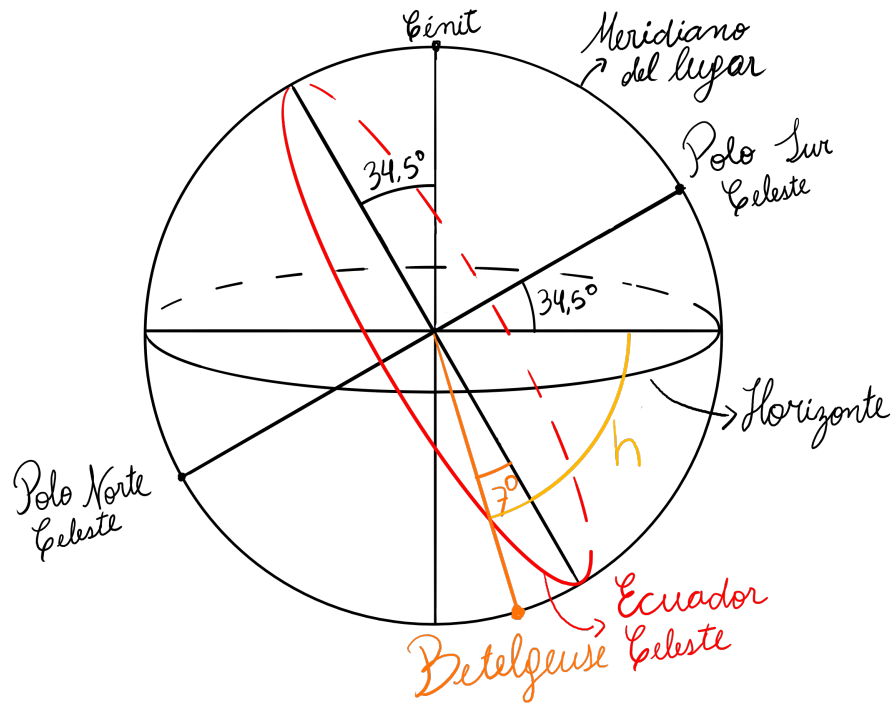
En el dibujo vemos que vale la siguiente igualdad:

$$h + 7^\circ + 34,5^\circ = 90^\circ$$

Despejando, tenemos la altura de Betelgeuse en la culminación superior es:

$$h = 48,5^\circ$$

Para la culminación inferior, tenemos que ubicar a Betelgeuse también en el Meridiano del Lugar, pero en el punto de menor altura:



En el dibujo vemos que la altura es negativa. Además, de la figura vemos que vale lo siguiente:

$$34,5^\circ + |h| = 90^\circ + 7^\circ = 97^\circ$$

Despejando, tenemos que el módulo de la altura de la culminación inferior de Betelgeuse es

$$|h| = 62,5^\circ$$

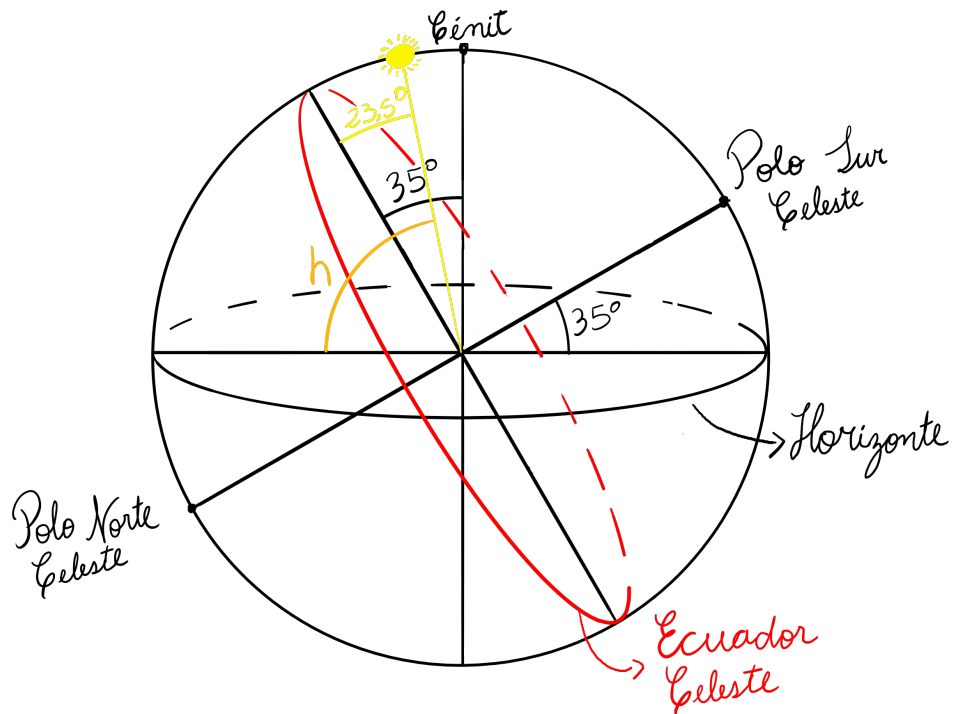
Y como ya sabíamos que era negativa, el valor de la altura de la culminación inferior de Betelgeuse es:

$$h = -62,5^\circ$$

Ejercicio 2.2. Calcular la altura de la culminación superior del Sol en el solsticio de Diciembre para un observador ubicado en la ciudad de la Plata (latitud $\varphi = 35^\circ S$, longitud $\lambda = 58^\circ O$). Calcular además la longitud de sombra de un mástil de 3 m. Datos: la declinación del Sol en el solsticio de Diciembre es $\delta_\odot = -23,5^\circ$.

Resolución:

Si bien no lo pide el ejercicio, vamos a hacer una representación de la situación en la esfera celeste como se hizo en el ejercicio 2.1.



De la figura observamos que vale la siguiente relación:

$$h + (35^\circ - 23,5^\circ) = 90^\circ$$

Despejando, tenemos que la altura del Sol en su culminación superior es

$$h = 78,5^\circ$$

Ahora bien, para calcular la longitud de la sombra de un mástil de 3 m en La Plata, hacemos un dibujo, recordando que la altura es el ángulo que forma el astro respecto al Horizonte.

Ejercicio 2.3. Un observador en Berazategui observa que Acrux culmina superiormente a las 20:30. Determinar a qué hora va a culminar superiormente esa estrella en la ciudad de Wellington, Nueva Zelanda.

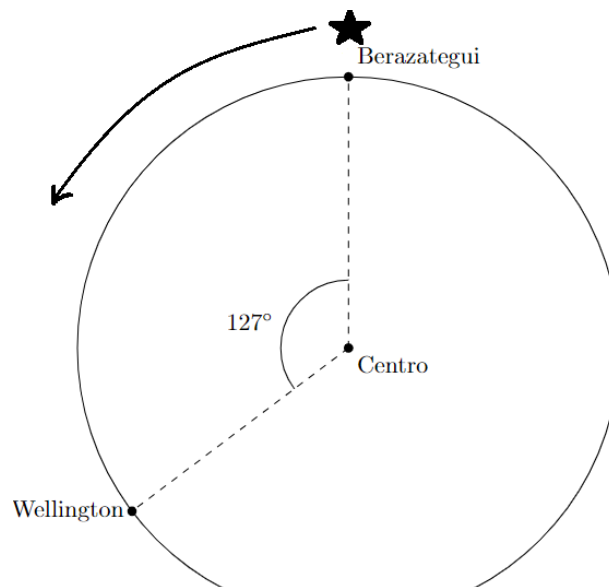
Datos:

Berazategui = $58^\circ 13' O$; $34^\circ 45' S$

Wellington = $174^\circ 46' E$; $41^\circ 17' S$

Resolución:

Para resolver el ejercicio vamos a hacer un corte de la tierra y separar las ciudades por su longitud (no nos interesa la latitud)



Tomado el punto de vista de la tierra el cielo gira de este a oeste. Entonces tardará en culminar el tiempo que tarde en recorrer el ángulo de longitud que separa las dos ciudades.

$$\text{Ángulo} = (180^\circ - 174^\circ 46') + (180^\circ - 58^\circ 13') = 127^\circ$$

Transformamos el ángulo a horas

$$\text{Ángulo} = \frac{127^\circ}{360^\circ} \times 24 \text{ h} = 8 \text{ h } 28'$$

Sumando esto a las 20:30hs nos da que la estrella culminará a las 5 de la mañana del día siguiente.

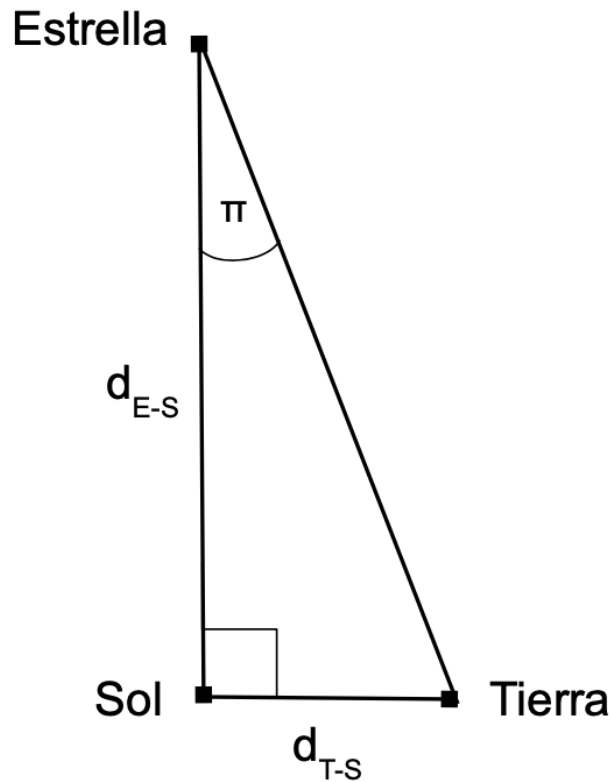
Ejercicio 2.4. *Próxima Centauri, que forma parte del sistema estelar triple de Alfa Centauri, es la estrella más cercana al sistema solar. La paralaje anual de Próxima Centauri es de $0,783''$.*

- a) Calcule la distancia de Próxima Centauri al Sol en kilómetros.*
- b) Una unidad muy frecuente en astronomía es el **pársec** (pc), que por definición es la distancia a la que estaría una estrella con un segundo de arco de paralaje. Con esta información, calcule la distancia de la Tierra al Sol en pársecs.*
- c) Calcule la distancia a Próxima Centauri en pársecs.*

Datos: Distancia entre la Tierra y el Sol: $d_{T-S} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$.

Resolución:

a) La paralaje anual de una estrella es el ángulo desde la estrella que subtiende la distancia entre la Tierra y el Sol. Véase la siguiente figura:



En donde π es la paralaje, d_{T-S} es la distancia entre la Tierra y el Sol y d_{E-S} es la distancia entre la estrella y el Sol.

Por lo tanto, utilizando trigonometría:

$$\tan(\pi) = \frac{d_{T-S}}{d_{E-S}}$$

Despejando:

$$d_{E-S} = \frac{d_{T-S}}{\tan(\pi)}$$

En donde $\pi = 0,783'' = (2,175 \cdot 10^{-4})^\circ$ y $d_{T-S} = 1,5 \cdot 10^8 km$

Por lo tanto:

$$d_{E-S} = 3,95 \cdot 10^{13} km$$

Nota: Por simplicidad del esquema, se supone que la Tierra, el Sol y la estrella son coplanares. La fórmula es válida aún si no lo son.

b) Utilizamos ahora la expresión derivada anteriormente para la paralaje:

$$\tan(\pi) = \frac{d_{T-S}}{d_{E-S}}$$

Por la definición de pársec, $d_{E-S} = 1 \text{ pc}$ cuando $\pi = 1''$. Entonces la distancia de la Tierra al Sol en pársecs es:

$$d_{T-S} = \tan(1'') \cdot 1 \text{ pc} \approx 4,85 \cdot 10^{-6} \text{ pc}$$

c) Usamos ahora el mismo despeje del inciso a).

$$d_{E-S} = \frac{d_{T-S}}{\tan(\pi)}$$

En este caso, $\pi = 0,783''$ y $d_{T-S} = 4,85 \cdot 10^{-6} \text{ pc}$. Por lo tanto:

$$d_{E-S} = \frac{4,85 \cdot 10^{-6} \text{ pc}}{\tan(0,783'')} \approx 1,28 \text{ pc}$$

Ejercicio 2.5. La expedición liderada por Magallanes fue la primera en circunnavegar la tierra. Partieron de España en 1519 navegando hacia el oeste, pasando por el estrecho que ahora lleva su nombre. De los 250 tripulantes solamente 18 sobrevivieron al viaje completo. Entre ellos el cronista Antonio Pigafetta, que se percató de un extraño fenómeno. Simplificando su viaje supongamos que se movieron exclusivamente por líneas de Latitud y longitud.

Partiendo de Andalucía ($6^{\circ}21' \text{ O}$; $36^{\circ}46' \text{ N}$) hasta un punto del océano con latitud $52^{\circ} 30' \text{ S}$. Navegaron hacia el oeste hasta darle una vuelta a la tierra para regresar luego, nuevamente a Andalucía partiendo de este punto.

- a) Calcular cuanto tiempo (en horas) les hubiese tomado el viaje.
- b) Algunos tripulantes tomaron registro de todos los días que duró la expedición. ¿Cuántos días habrían anotado que duró el viaje?

Datos:

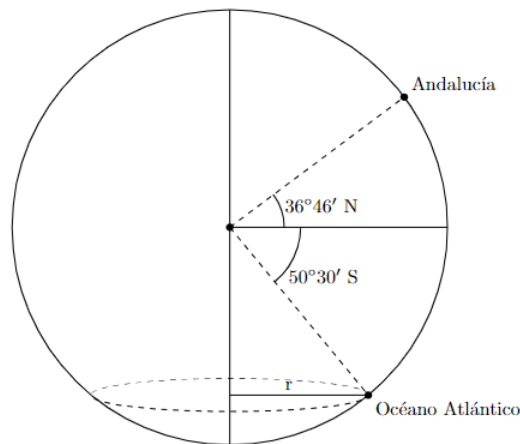
Radio de la Tierra = 6400 Km

Velocidad media = 1,7357 Km/h

1 Día = 24hs

Resolución:

- a) Calcularemos la distancia recorrida por la tripulación. Empezando por el tramo ida y vuelta desde Andalucía hasta el punto en el oceano.



$$\text{Distancia recorrida en latitud} = \left(\frac{36^{\circ}46' + 50^{\circ}30'}{360} \right) \times 2\pi \times 6400 \text{ km} \times 2 = 19495,56 \text{ km}$$

La distancia que se movieron el longitud resulta un poco más difícil de calcular. Debemos calcular el radio r del círculo alrededor del que se estás moviendo.

$$r = \cos(50^\circ 30') \times 6400 = 4070,9 \text{ km}$$

Calculamos con esto el perimetro del circulo que recorrieron

$$4070,9 \text{ km} \times 2\pi = 25578,22 \text{ km}$$

$$25578,22Km + 19495,56Km = 45073,78Km$$

Finalmente lo dividimos por la velocidad media y obtenemos el tiempo que duró la expedición

$$\frac{45073,78 \text{ km}}{1,7357 \text{ km/h}} = 25968,65h \text{ horas}$$

- b) En este inciso se pide que se reflexione sobre lo que significa el día solar. Sabemos que en realidad la rotación aparente del sol se debe a la rotación terrestre sobre su eje. Como el sol aparentemente en el cielo se desplaza de este a oeste si nosotros hiciésemos lo mismo estaríamos en realidad girando alrededor de la tierra con una velocidad menor. Es por esto que los tripulantes hubiesen visto que en total tenían un día menos con respecto a los que habían permanecido en tierra. El tiempo pasó igual para ambos, solo que, en promedio para los tripulantes sus días duraron un poco más.

Entonces:

$$\frac{25968,65 \text{ h}}{24 \text{ h/día}} \approx 1082 \text{ días}$$
$$1082 \text{ días} - 1 \text{ día} = 1081 \text{ días}$$



3. Astrofísica

Ejercicio 3.1. El efecto Doppler es un fenómeno ondulatorio causado por el movimiento de un emisor o receptor de ondas. Por ejemplo, si una galaxia se aleja de la Tierra, la vamos a ver de un color más rojizo. Esto se debe a que, al alejarse, el tiempo entre un pulso y otro de luz es mayor, es decir, la frecuencia que detectamos es menor. Como el rojo es el color con menor frecuencia del espectro visible, a este fenómeno se lo conoce como **corrimiento al rojo** o **redshift**, mientras que si se acerca, la frecuencia que medimos es mayor y en este caso el fenómeno se llama **corrimiento al azul** o **blueshift**.

Ahora sí, procedemos a las cuentas. Si λ es la longitud de onda que detectamos, λ_0 la longitud de onda en reposo, v la velocidad con la que se aleja o acerca un objeto y c la velocidad de la luz, entonces vale la siguiente relación:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \quad (3.1)$$

Para una galaxia, se observa que la línea de absorción de hidrógeno H_α tiene una longitud de onda de $657,6 \text{ nm}$, mientras en el laboratorio se midió que esta es de $656,3 \text{ nm}$.

- a) Determinar si la galaxia se acerca o se aleja y calcular su velocidad.
- b) Edwin Hubble estableció que la relación entre la distancia D a una galaxia y la velocidad v a la que se acerca o se aleja es

$$v = H_0 \cdot D \quad (3.2)$$

donde $H_0 = 70 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$. Calcular entonces la distancia en años luz a la galaxia de a).

Datos: $c = 300000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ al}$.

Resolución:

a) En primer lugar, como la longitud de onda de la línea de absorción aumentó, eso significa que la galaxia se **aleja**. Para calcular la velocidad v con la que se aleja, vamos a utilizar la relación dada en el enunciado, para lo cual identificamos que la longitud de onda que medimos es $\lambda = 657,6 \text{ nm}$, mientras que la longitud de onda en reposo es la medida en el laboratorio, es decir, $\lambda_0 = 656,3 \text{ nm}$. Entonces reemplazamos esto en la Ecuación 3.1:

$$\frac{657,6 \text{ nm} - 656,3 \text{ nm}}{656,3 \text{ nm}} = \frac{v}{c} = \frac{v}{300000 \frac{\text{km}}{\text{s}}}$$

Multiplicando en ambos miembros de la ecuación por $300000 \frac{km}{s}$, tenemos nuestra respuesta:

$$v = 300000 \frac{km}{s} \cdot \frac{657,6 nm - 656,3 nm}{656,3 nm} \approx 594 \frac{km}{s}$$

b) Despejamos ahora de la [Ecuación 3.2](#) la distancia y reemplazamos la velocidad obtenida en a):

$$D = \frac{v}{H_0} = \frac{594 \frac{km}{s}}{70 \frac{km/s}{Mpc}} \approx 8,5 Mpc = 8,5 \cdot 10^6 pc$$

Como nos piden el resultado en años luz y $1 pc = 3,26 al$, finalmente tenemos que

$$D = 8,5 \cdot 3,26 \cdot 10^6 al \approx 27,7 \cdot 10^6 al$$

Ejercicio 3.2. Se sabe que la magnitud absoluta M de la estrella Betelgeuse es de -5.85 y su magnitud aparente de 0.58 . Calcule la distancia entre esta estrella y la Tierra en años luz. Dato: $1 pc = 3,26 al$.

Resolución:

La magnitud aparente y la magnitud absoluta son dos medidas utilizadas en astronomía para describir el brillo de los objetos celestes.

La magnitud aparente es una medida del brillo de un objeto celeste tal como se observa desde la Tierra. Cuanto menor sea esta, mas brillante se verá en el cielo. La magnitud absoluta es una medida del brillo intrínseco de un objeto celeste, definido como la magnitud aparente que tendría si estuviera a una distancia estándar de 10 parsecs⁴ (aproximadamente 32.6 años luz) de la Tierra.

Podemos obtener la distancia a la que está la estrella de la tierra sabiendo que

$$M = m + 5 - 5 \log_{10}(d_{pc})$$

donde M y m son la magnitud absoluta y aparente y d_{pc} su distancia en parsecs. Reemplazando entonces por los valores dados por la consigna, podemos despejar la distancia:

$$-5,85 = 0,58 + 5 - 5 \log_{10}(d_{pc})$$

$$d_{pc} = 10^{\frac{-5,85 - 0,58 - 5}{-5}} pc = 10^{2,286} pc \approx 193,2 pc$$

⁴Ver ejercicio 2.4 b)

Para obtener esta en años luz (A.L), hay que recordar que 1 parsec son 3.26 años luz, por lo que la distancia en años luz será

$$d = 193,2pc \cdot \frac{3,26A.L}{1pc} = 629,8A.L$$



Ejercicio 3.3. La ley de Wien relaciona la longitud de onda del máximo de intensidad de emisión de luz de una estrella con su temperatura expresada en Kelvin, mediante la fórmula:

$$\lambda_{max} = \frac{0,0028976[m \cdot K]}{T[K]} \quad (3.3)$$

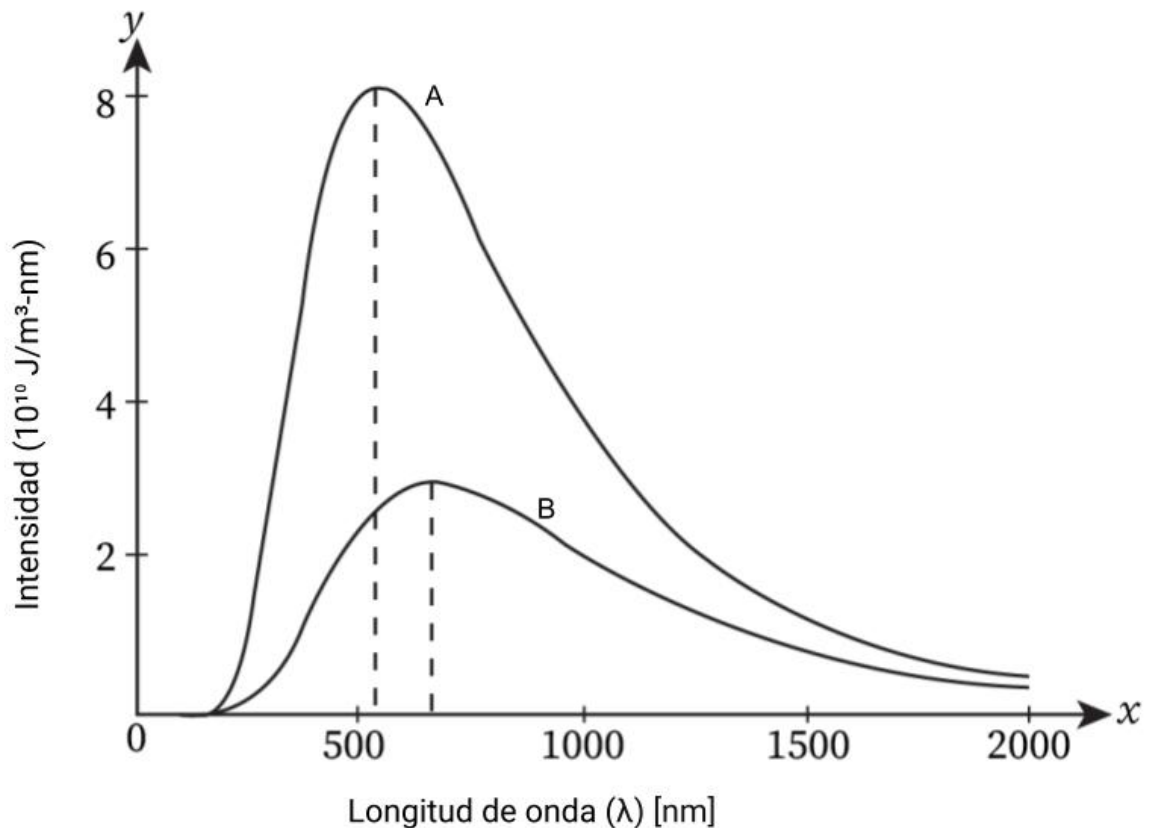


Figura 3.1: Gráfico de intensidad vs longitud de onda de dos estrellas A y B. Fuente: Bartleby.com]

a) A partir del gráfico, estimar la longitud de onda correspondiente al máximo de emisión de las estrellas A y B. ¿Cuál de las dos estrellas es más caliente?

El flujo emitido por una estrella es la cantidad de energía emitida por unidad de tiempo y de área. La ley de Stefan-Boltzmann establece que el flujo está dado por la ecuación:

$$F = \sigma \cdot T^4 \quad (3.4)$$

Con $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ (constante de Stefan-Boltzmann)

b) ¿Cuál es el flujo de cada una de las estrellas A y B?

Resolución:

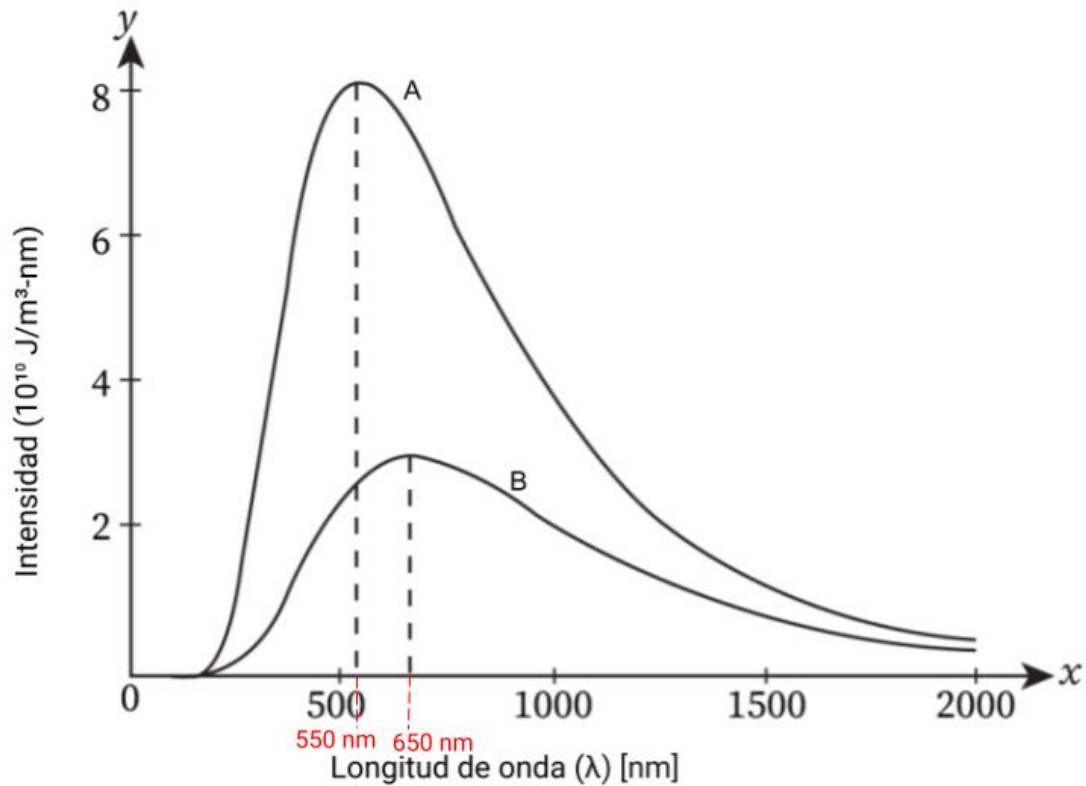


Figura 3.2: Gráfico de intensidad vs longitud de onda de dos estrellas A y B. Fuente: Bartleby.com]

Observando el gráfico podemos estimar que el pico de emisión de la estrella A se encuentra en los 550nm y el pico de emisión de la estrella B en los 650nm, aproximadamente. Con esa información, podemos obtener la temperatura de las estrellas usando la Ley de Wien:

$$\lambda_{max} = \frac{0,0028976[m.K]}{T[K]}$$

Para la estrella A, reemplazamos con $\lambda_{max} = 550 \cdot 10^{-9}m$ y obtenemos $T_A = 5268K$. Para la estrella B, reemplazamos con $\lambda_{max} = 650 \cdot 10^{-9}m$ y obtenemos $T_B = 4458K$

Por lo tanto, la estrella A es más caliente que la estrella B.

b) Para calcular el flujo, utilizamos la ecuación de Stefan-Boltzmann:

$$F = \sigma \cdot T^4$$

Con $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ (constante de Stefan-Boltzmann).

Reemplazando con las temperaturas halladas en el inciso anterior $T_A = 5268K$ y $T_B = 4458K$ obtenemos $Flujo_A = 4,37 \cdot 10^7 \frac{W}{m^2}$ y $Flujo_B = 2,24 \cdot 10^7 \frac{W}{m^2}$.



4. Instrumentos astronómicos

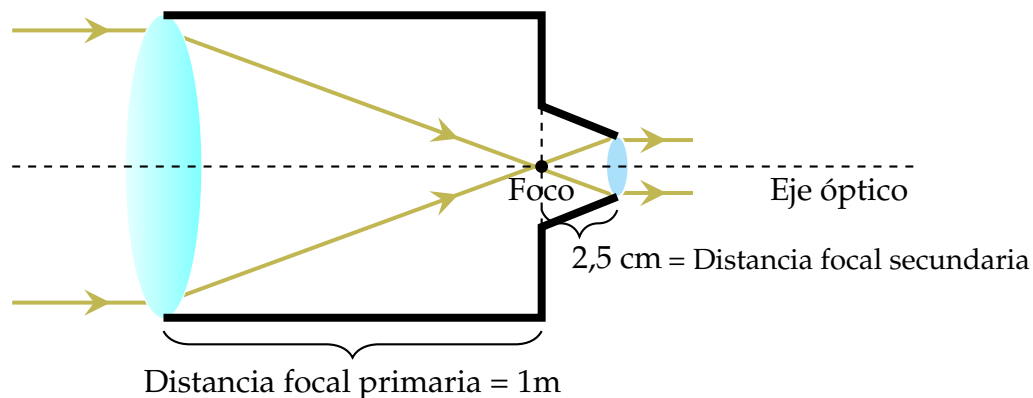
Ejercicio 4.1. Una persona dispone de dos lentes. La primera es una lente convergente de 1 metro de distancia focal. La segunda tiene una distancia focal de 2,5 cm. Su plan es construir un telescopio refractor.

a) Calcular a qué distancia se tienen que ubicar las lentes si tiene como dato que la segunda lente es convergente. ¿Y si es divergente?

b) Calcular el aumento angular del telescopio.

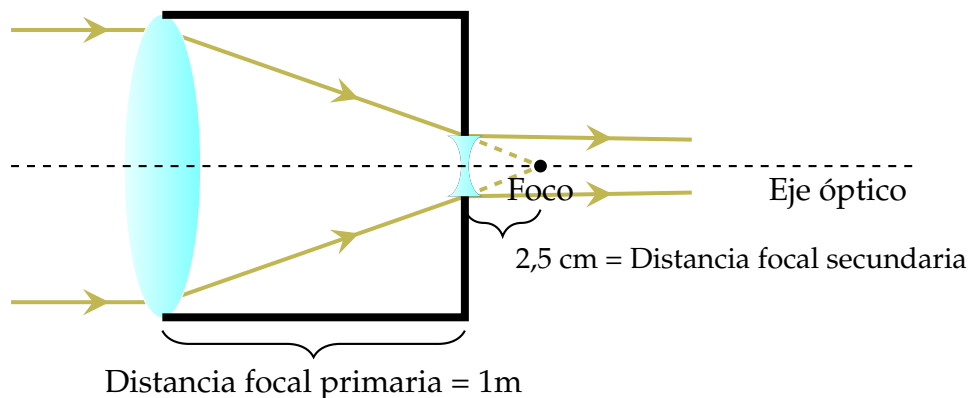
Resolución:

a) Un telescopio refractor requiere, al menos, de 2 lentes para poder formar una imagen que pueda observar el ojo humano. En el caso de tener 2 lentes convergentes, las mismas se tienen que ubicar colocando su distancia focal de la siguiente manera:



De tal manera, que la distancia entre lentes es la suma de las distancias focales de cada lente. En este caso, 1,025m.

En el caso de tener una segunda lente divergente, el diagrama queda distinto:



De tal manera, que la distancia entre lentes es la resta de la distancia focal de la lente primaria menos la distancia focal de la lente secundaria. En este caso, 0,975m.

b) El aumento angular se calcula de la siguiente manera:

$$\alpha = \frac{\text{Distancia focal objetivo}}{\text{Distancia focal ocular}}$$

En general, la lente primaria es el objetivo y la secundaria es el ocular.
En nuestro caso:

$$\alpha = \frac{100 \text{ cm}}{2,5 \text{ cm}} = 40$$

El aumento angular corresponde a 40x.



Ejercicio 4.2. La magnificación o aumento de un telescopio es la razón con la que incrementa el tamaño aparente de los objeto al observarlo a través del mismo. En un telescopio, esta magnitud depende de la distancia focal del objetivo d_{ob} y la distancia focal del ocular d_{oc} de la siguiente manera:

$$M = \frac{d_{ob}}{d_{oc}} \quad (4.1)$$

Un observatorio astronómico dispone de un telecopio de una distancia focal de 3084 mm, y desea observar una estrella de tamaño aparente de 7'' de arco con un tamaño de 30'. Calcular cuál debe ser la distancia focal de un ocular para tener lo deseado.

Resolución:

Nuestra intención es usar la [Ecuación 4.1](#). El enunciado nos dice que $d_{ob} = 3084 \text{ mm}$. Como queremos observar una estrella de tamaño aparente de 7'' de arco con un tamaño de 30', la magnificación que buscamos es de

$$M = \frac{30'}{7''} = \frac{60'' \cdot 30}{7''} \approx 257,1$$

Por la [Ecuación 4.1](#):

$$257,1 = \frac{3084 \text{ mm}}{d_{oc}}$$

Despejando, finalmente tenemos nuestra respuesta:

$$d_{oc} = \frac{3084 \text{ mm}}{257,1} \approx 12 \text{ mm}$$

Ejercicio 4.3. La resolución angular de un telescopio es la menor separación angular que pueden tener dos cuerpos tal que dicho telescopio pueda distinguirlos como cuerpos distintos. La resolución angular de un telescopio de apertura circular sigue la siguiente ecuación:

$$\text{sen}(\alpha) = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

En donde α es la resolución angular del telescopio, λ es la longitud de onda utilizada para la observación y D es el diámetro del telescopio.

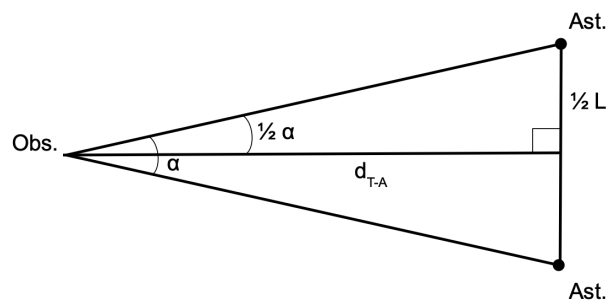
Se observan dos asteroides pequeños a 1,2 UA de la Tierra, a 75 km entre sí. Suponiendo que observa en $\lambda = 550\text{nm}$, ¿cuál es el mínimo radio que deberá tener un telescopio para poder distinguir los cuerpos?

Nota: $1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$ y $1\text{UA} = 1,5 \cdot 10^8\text{km}$

Resolución:

En primer lugar, si el radio del telescopio debe ser el menor posible, entonces la separación angular entre los asteroides coincide con la resolución angular del telescopio.

Luego, se obtiene la separación angular entre los asteroides sabiendo la distancia entre ellos y la distancia a Tierra. Véase el siguiente esquema:



En el esquema, α es la distancia angular entre los dos asteroides desde la posición del observador (en la Tierra). La posición de los asteroides está representada con sendos círculos. Además, d_{T-A} es la distancia de los asteroides a la Tierra ($d_{T-A} = 1,2\text{UA}$) y L es la distancia entre los dos asteroides ($L = 75\text{km}$).

Aplicando trigonometría:

$$\text{sen}\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{\frac{1}{2}L}{d_{T-A}}$$

Despejando:

$$\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{\frac{1}{2}L}{d_{T-A}}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{\frac{1}{2}75\text{km}}{1,2 \cdot 1,5 \cdot 10^8\text{km}}\right) = (2,387 \cdot 10^{-5})^\circ$$

Sabiendo que el diámetro del telescopio es el doble de su radio, la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\text{sen}(\alpha) = 1,22 \frac{\lambda}{2R}$$

En donde R es el radio del telescopio.

Despejando R:

$$R = \frac{1,22 \cdot \lambda}{2 \cdot \text{sen}(\alpha)}$$

Sabiendo que $\lambda = 550nm = 550 \cdot 10^{-9}m$,

$$R = \frac{1,22 \cdot 550 \cdot 10^{-9}m}{2 \cdot \text{sen}((2,387 \cdot 10^{-5})^\circ)} = 0,805m$$

