

**15<sup>ta</sup> Olimpiadas Metropolitanas de Física**  
Nivel avanzado  
Prueba de opciones múltiples

- Chequee que el nivel de su prueba sea el adecuado.
  - No se pueden usar libros ni apuntes.
  - La prueba dura un total de 3 horas.
  - Cada respuesta correcta suma 1 punto.
  - Cada respuesta incorrecta resta 0.25 puntos.
  - Los problemas de opción múltiple representan un 60 % del puntaje total.
  - Al final de cada problema, puede haber una lista con datos de interés para resolver el mismo.
  - Complete y entregue la grilla de respuestas entregada.
-



## Problema 1. El movimiento de las estrellas: de Newton a Einstein

La física moderna entiende la gravedad de una manera muy distinta a como la concebimos en la vida cotidiana y a como la entendía Newton en el siglo XVIII. Según este, las interacciones gravitatorias eran instantáneas y actuaban a distancia, como si los planetas estuvieran unidos por un hilo invisible. Sin embargo, como veremos más adelante, su teoría no lograba explicar algunos fenómenos astronómicos, como la precesión del perihelio de Mercurio y la deflexión de rayos de luz al pasar cerca de objetos muy masivos como el Sol.

Como respuesta a estas inconsistencias, Einstein propuso en 1915 una idea revolucionaria: en su **teoría de la Relatividad General**, la gravedad no es una fuerza sino una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. Por extraña que parezca, esta teoría destronó a la entonces ampliamente aceptada concepción newtoniana. En este nuevo marco, los cuerpos no sienten una fuerza gravitatoria: simplemente siguen trayectorias dadas por la distancia más corta posible en un espacio curvo (a estas curvas las llamamos *geodésicas*).

En este problema, nos sumergiremos (tímidamente) en la teoría de la Relatividad General de Einstein. Para ello, comenzaremos desde lo más simple e iremos construyendo paso a paso nuestra primera aproximación a la compleja teoría.

### Pregunta 1

Según la teoría de la gravitación de Newton, los cuerpos masivos (como los cuerpos celestes), interactúan a través de la fuerza gravitatoria cuya expresión es

$$F_g = -\frac{GMm}{r^2}, \quad (1)$$

donde  $r$  es la distancia entre los cuerpos,  $G$  es la constante de gravitación universal y  $m$  y  $M$  son sus respectivas masas. Si pensamos en dos cuerpos celestes que se rigen por las ecuaciones de Newton, entonces podemos describir, como primera aproximación, el movimiento de un planeta de masa  $m$  alrededor de una estrella de masa  $M \gg m$  (que consideramos quieta) como un movimiento circular con centro en la estrella quieta. Como conocemos la fuerza que le ejerce la estrella al planeta, podemos entonces averiguar a qué velocidad se está moviendo, por ejemplo, Marte respecto del Sol.

**Suponiendo que Marte describe un movimiento circular uniforme alrededor del Sol, ¿cuál es la velocidad *tangencial* de Marte?**

- a. 13.7 km/s
- b.  $1 \times 10^{-7}$  1/s

- c. 24 km/s
- d.  $6 \times 10^{-11}$  1/s
- e.  $1,92 \times 10^{13}$  km/s

**Datos:**

- Masa solar:  $M = 1,989 \times 10^{30}$  kg
- Masa de Marte:  $m = 6,419 \times 10^{23}$  kg
- Constante gravitatoria universal:  $G = 6,674 \times 10^{-11}$  N · (m/kg)<sup>2</sup>
- Radio de la órbita de Marte:  $R = 2,279 \times 10^8$  km

## Pregunta 2

La teoría de la gravitación de Newton ha sido extraordinariamente exitosa para describir una amplia variedad de fenómenos astronómicos. Por ejemplo, permitió entender que la órbita terrestre es en realidad no es circular sino que describe una elipse, y estimar las distancias de mínimo y máximo acercamiento entre la Tierra y el Sol, conocidas como *perihelio* y *afelio*, respectivamente. Esto puede predecirse utilizando el balance de energía de la Tierra en su movimiento orbital

$$E = T + V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}, \quad (2)$$

donde  $E$  es la energía mecánica de la Tierra,  $T$  es su energía cinética,  $\ell$  su momento angular y  $v_r$  es la velocidad radial de la Tierra. El término  $V_{\text{ef}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$  se conoce como el potencial efectivo del problema.

En la Figura 1 se muestra un gráfico del potencial efectivo en función de la distancia  $r$ , junto con dos energías mecánicas distintas  $E_1$  y  $E_2$ . Si consideramos, por ejemplo, la energía  $E_1$ , puede observarse que el radio de la órbita terrestre podrá adquirir un valor máximo y un mínimo en los puntos donde la curva del potencial efectivo (línea azul) corta la línea de energía constante (línea roja). En otras palabras, son los puntos en los que la velocidad radial es nula ( $v_r = 0$ ). Estos puntos se conocen como puntos de retorno, o semi-ejes de la órbita. Al extremo más cercano al Sol se lo llama *perihelio*, y al más lejano *afelio*.

**¿Cuáles son los valores aproximados del perihelio ( $r_p$ ) y del afelio ( $r_a$ ) de la órbita terrestre?**

- a.  $r_p = 147 \times 10^6$  km ;  $r_a = 152 \times 10^6$  km
- b.  $r_p = 149,6 \times 10^6$  km ;  $r_a = 149,6 \times 10^6$  km
- c.  $r_p = 141 \times 10^6$  km ;  $r_a = 158 \times 10^6$  km
- d.  $r_p = 152 \times 10^6$  km ;  $r_a = 147 \times 10^6$  km

e.  $r_p = 158 \times 10^6$  km ;  $r_a = 141 \times 10^6$  km

**Datos:**

- Masa solar:  $M = 1,989 \times 10^{30}$  kg
- Masa de la Tierra:  $m = 5,972 \times 10^{24}$  kg
- Momento angular de la Tierra:  $\ell = 2,66 \times 10^{40}$  kg m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>.
- Constante gravitatoria universal:  $G = 6,674 \times 10^{-11}$  N · (m/kg)<sup>2</sup>
- Energía mecánica de la Tierra:  $E = -2,65 \times 10^{33}$  J

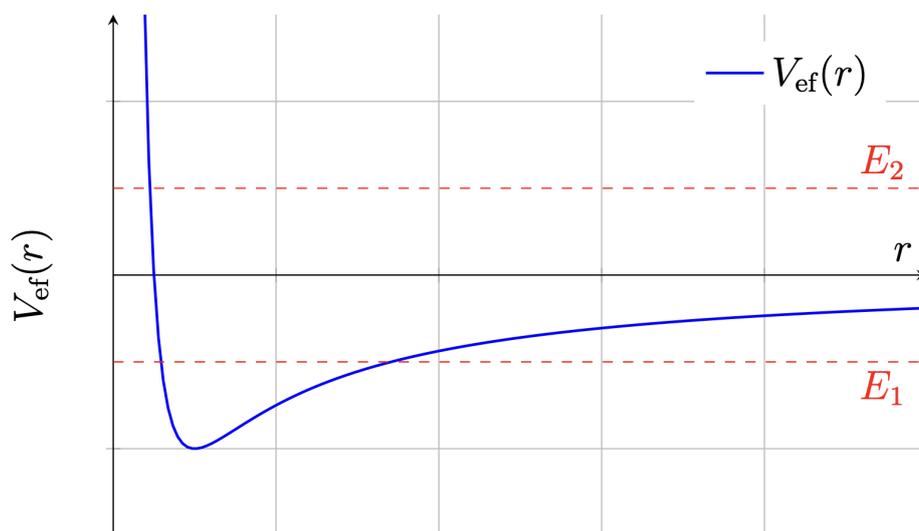


Figura 1: potencial efectivo newtoniano en función de  $r$ , junto con dos posibles energías  $E_1$  y  $E_2$ .

### Pregunta 3

Es aquí donde aparece un problema: según la teoría newtoniana, las órbitas de los planetas deberían ser elipses cerradas. Sin embargo, no siempre es así: se observó que la órbita de Mercurio —el planeta más cercano al Sol, y por lo tanto el que experimenta una fuerza gravitatoria más intensa— presenta una leve precesión en su perihelio. Es decir, su perihelio (el punto más cercano al Sol) cambia lentamente de lugar en cada vuelta: su órbita no se cierra.

Desesperados, los científicos del momento intentaron explicar este fenómeno incorporando el efecto gravitatorio de los otros planetas, pero los cálculos no alcanzaban para explicar la precesión observada. Fue entonces cuando Albert Einstein propuso su idea revolucionaria para explicar esta observación: la gravedad no es una fuerza, sino una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo.

¿Qué hace que se curve el espacio-tiempo? Las mismas masas de los cuerpos que lo habitan, por supuesto. Esta idea es la esencia de la teoría es la Relatividad General.

¿Y qué implica esto para el movimiento de los planetas? Imaginemos una hormiga caminando sobre la superficie de un globo. Aunque camina “en línea recta”, al cabo de un tiempo habrá vuelto al mismo punto. Podría pensar que una fuerza la desvió, sin darse cuenta de que, en realidad, fue la misma curvatura del globo la que desvió su camino.

Lo mismo ocurre con los planetas: aunque ya no pensamos en una “fuerza” gravitatoria, podemos describir su movimiento como si cayeran en un pozo de potencial, igual que como lo pensaba Newton. La diferencia es que ese pozo ahora incorpora un pequeño término adicional que representa la curvatura del espacio-tiempo.

La teoría de la Relatividad General de Einstein permite calcular esta precesión adicional de la órbita de Mercurio, que se aproxima con la fórmula

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)c^2}, \quad (3)$$

donde

- $\Delta\varphi$  es el avance del perihelio por revolución (en radianes),
- $M = 1,989 \times 10^{30}$  kg es la masa solar,
- $G = 6,674 \times 10^{-11}$  N (m/kg)<sup>2</sup>, es la constante gravitatoria universal,
- $a = 5,79 \times 10^{10}$  m es el semieje mayor de la órbita de Mercurio,
- $e = 0,2056$  es la excentricidad de la órbita,
- $c = 3 \times 10^8$  m/s es la velocidad de la luz.
- 1 rad = 206 265 segundos de arco

Sabemos que Mercurio da aproximadamente 415 revoluciones alrededor del Sol en un siglo.

**Calcule el avance total del perihelio de Mercurio en segundos de arco durante un siglo. ¿Cuál de los siguientes valores se aproxima mejor al resultado obtenido?**

- a. 4,3''
- b. 1,2°
- c. 360''
- d. 0,1''
- e. 43''

## Pregunta 4

Además de lograr predecir correctamente el comportamiento de la órbita de Mercurio, la Relatividad General tuvo otro gran éxito: explicar la curvatura de la trayectoria de la luz al pasar cerca de cuerpos muy masivos.

Según Newton, si consideramos a la luz ( $m = 0$ ), no sentiría la fuerza gravitatoria, pues esta depende de la masa del objeto. Sin embargo, en el marco relativista, la luz sí se desvía: no porque “sienta” una fuerza, sino porque viaja por un espacio-tiempo que está curvado por la presencia de masa.

Einstein predijo que el ángulo de desviación de un rayo de luz que pasa a una distancia mínima  $R$  del centro de un cuerpo de masa  $M$  está dado aproximadamente por

$$\Delta\theta \approx \frac{4GM}{c^2 R}, \quad (4)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz y  $\Delta\theta$  es el ángulo de desviación angular del rayo de luz. Un diagrama de este fenómeno se muestra en la Figura 2.fran

**Calcule la desviación (en segundos de arco) para un rayo que pasa a una altura  $h = 2,00 \times 10^7$  m sobre la superficie del Sol y elija la opción correcta.**

- a.  $\Delta\theta \approx 1,68''$
- b.  $\Delta\theta \approx 1,75''$
- c.  $\Delta\theta \approx 1,81''$
- d.  $\Delta\theta \approx 1,62''$
- e.  $\Delta\theta \approx 1,54''$

### Datos:

- Masa solar:  $M = 1,989 \times 10^{30}$  kg
- Radio solar:  $R_{\odot} = 6,96 \times 10^8$  m
- Constante gravitatoria:  $G = 6,674 \times 10^{-11}$  N(m/kg)<sup>2</sup>
- Velocidad de la luz:  $c = 3,00 \times 10^8$  m/s
- 1 rad = 206 265 segundos de arco

**Dato de color:** Este valor fue medido durante el famoso eclipse de 1919 por la expedición de Eddington, confirmando la predicción de Einstein y marcando el inicio de su fama mundial.

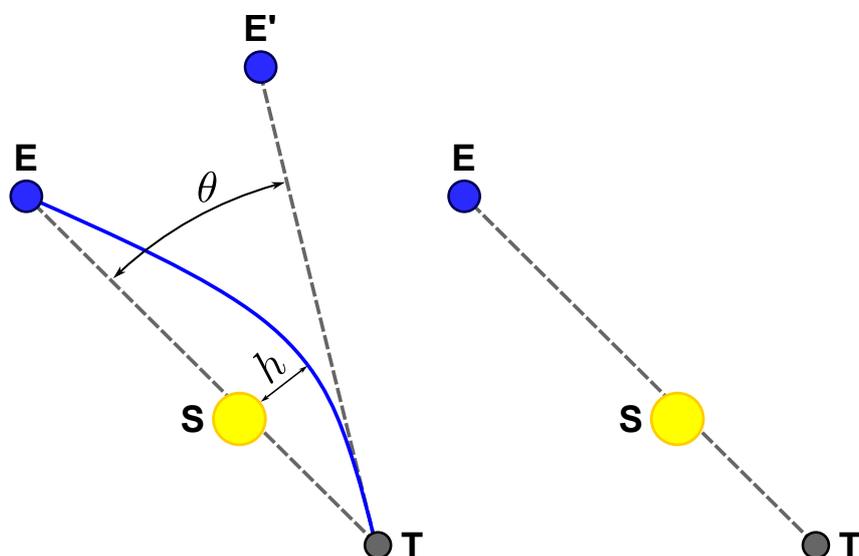


Figura 2: si el Sol (S) no estuviera veríamos la estrella en la posición E. Sin embargo, como la luz gravita y se desvía, vemos desde la Tierra (T) una imagen de la estrella en la posición E' que está a un ángulo  $\theta$  de su posición real.

### Pregunta 5

Otro de los grandes aciertos de la teoría de Einstein es que, combinada con las observaciones astronómicas, permite explicar la expansión del universo —aunque el propio Einstein, en su momento, no estaba del todo convencido de esta idea.

Podemos imaginar la expansión del universo como si dos puntos inicialmente separados se alejaran entre sí con una velocidad  $v$ . Una de las evidencias de este efecto es el corrimiento al rojo relativista (o efecto Doppler relativista): la luz procedente de objetos que se alejan presenta una frecuencia más baja, lo que equivale a un color más rojo.

Para ilustrar el mecanismo, consideremos un escenario simplificado. Dos amigos, Alicia y Beto, están separados por una distancia inicial  $d$ . Desde el punto de vista de Beto, Alicia se aleja a una velocidad constante  $v$ , y emite pulsos de luz cada un cierto período  $\tau$ . Los pulsos de luz viajan a la velocidad de la luz,  $c$ . Sin embargo, debido a la expansión del universo, el primer pulso debe recorrer una distancia  $d$  hasta llegar hasta Beto; mientras que el segundo pulso, emitido un tiempo  $\tau$  después, debe recorrer una distancia  $d + v\tau$ , como se muestra en la Figura 3. De este modo, Beto va a observar un mayor período entre pulsos.

**Calcule la frecuencia a la que Beto recibe los pulsos, en función de la frecuencia de emisión  $f$ , la velocidad  $v$  y la velocidad de la luz  $c$ .**

a.  $f_B = \frac{f}{1 + \frac{v}{c}}$

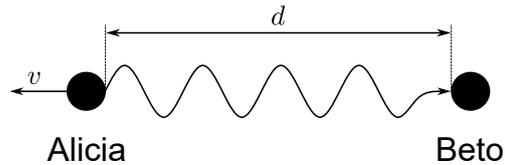
b.  $f_B = \frac{f}{1 - \frac{v}{c}}$

c.  $f_B = f \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)$

d.  $f_B = f \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right)$

e. Ninguna de las anteriores

**Pulso 1**



**Pulso 2**

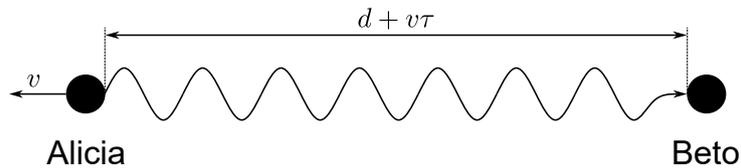


Figura 3: distancia recorrida por cada pulso de luz según Beto.

**Comentario para lxs interesadxs:** Este resultado es el Doppler clásico para luz, ya que no hemos considerado efectos relativistas en la medición de  $\tau$ .

Para obtener el Doppler relativista, debemos recordar que, desde el punto de vista de Beto, la frecuencia de emisión real de Alicia no es la que él mediría si estuviera en reposo respecto a ella: su reloj está en movimiento y corre más lento. Esto hace que el período medido por Beto para las emisiones sea

$$\tau = \gamma \tau_0, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

donde  $\tau_0$  es el período en el que Alicia emite los pulsos medido por ella. Quedan invitados a intentar resolver ese caso en sus hogares para llegar a la expresión del efecto Doppler relativista.

## Problema 2. Sobre de radiación, calor y electricidad

La energía térmica y sus mecanismos de transferencia tienen gran relevancia en la física aplicada, con presencia en fenómenos tan diversos como la radiación proveniente del Sol, el funcionamiento de dispositivos eléctricos o los cambios de estado de la materia. En este problema, estudiaremos distintos escenarios que integran conceptos de termodinámica, calorimetría, electricidad y propiedades térmicas de materiales, con el objetivo de analizar y cuantificar procesos de conversión y transporte de energía.

### Pregunta 6

El primer objetivo es estimar en qué longitud de onda emite principalmente el Sol. Para ello, existe una relación precisa entre la temperatura  $T$  a la que se encuentra el Sol y la longitud de onda principal  $\lambda_{\text{ppal}}$  en la que emite dentro del espectro electromagnético. Esa relación está dada por la ecuación de Wien:

$$\lambda_{\text{ppal}} = \frac{2,898 \text{ mm.K}}{T}.$$

Sin embargo, para conocer la temperatura a la que se encuentra el Sol, supondremos que el Sol emite como un cuerpo negro. Esto implica que la potencia por unidad de área  $J$  que irradia sigue la expresión:

$$J = \sigma T^4$$

donde  $\sigma = 5,73 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$  es la constante de Stefan-Boltzmann. Sabiendo que el radio del Sol es de  $7 \times 10^8 \text{ m}$  y que emite una potencia total de  $3,96 \times 10^{26} \text{ W}$ , la longitud de onda principal en la que emite el Sol resulta ser, aproximadamente:

- a.  $5 \times 10^{-4} \text{ m}$
- b.  $5 \times 10^{-7} \text{ m}$
- c.  $7,33 \times 10^{-6} \text{ m}$
- d.  $7,33 \times 10^{-3} \text{ m}$
- e.  $4 \times 10^{-5} \text{ m}$

**Ayuda:** el área de una esfera se puede calcular como  $A = 4\pi r^2$ , con  $r$  su radio.

### Pregunta 7

Por otro lado, podríamos ver qué tan útil resulta la energía que proviene del Sol para aumentar la temperatura de objetos cotidianos. Una forma de hacerlo es, por ejemplo, utilizando un panel solar. Supongamos que se tiene uno con un área de  $2 \text{ m}^2$  y recibe una potencia por unidad de área de  $1,4 \times 10^3 \text{ W}/\text{m}^2$  proveniente del Sol. La energía colectada es utilizada para calentar  $5 \text{ L}$  de agua ( $\text{C}_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C})$ ) que se encuentra a una temperatura inicial de  $303 \text{ K}$ . Si el panel posee un rendimiento del  $25\%$ , el tiempo requerido para que **TODA** la masa de agua llegue a  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  es, aproximadamente:

- a. 125 s
- b. 500 s
- c. 1000 s
- d. 35 min
- e. 70 min

**Ayuda:** recuerde que  $1 \text{ cal} = 4,184 \text{ J}$ .

### Pregunta 8

Una forma alternativa para aumentar la temperatura de los cuerpos es aprovechando la energía eléctrica a partir de la potencia irradiada por una resistencia eléctrica. En este caso, se sumerge un calentador de resistencia  $R_C = 100 \Omega$  en 300mL de agua ( $c_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ cal}/(\text{g}\cdot^\circ\text{C})$ ) a una temperatura inicial de 298 K. Este calentador es conectado a un circuito eléctrico (ver Figura 4) de manera que la potencia eléctrica disipada por  $R_C$  hará calentar el agua. La fuente de tensión proporciona 240 V y todas las demás resistencias involucradas dentro del circuito ( $R_1, R_2, R_3$ ) son también de  $100 \Omega$ . El tiempo necesario para que **TODA** la masa de agua pase a fase gaseosa ( $L_{\text{vap}} = 540 \text{ cal/g}$ ) es, aproximadamente:

- a. 201 min
- b. 2875 s
- c. 22,3 min
- d. 320 s
- e. 2,1 hs

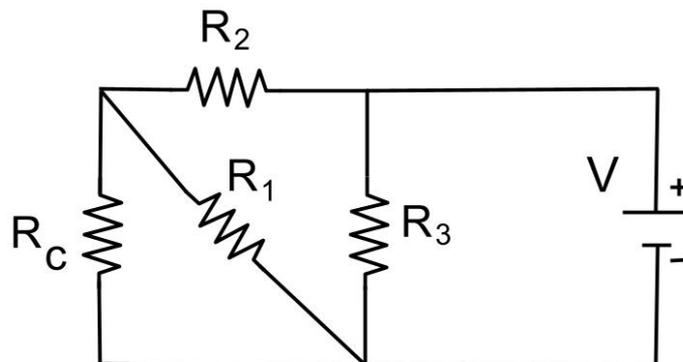


Figura 4: esquema del circuito eléctrico del calentador.

## Pregunta 9

Otro método utilizado para aumentar la temperatura de ciertos objetos es a partir de la compresión de gases. En este caso, contamos con un recipiente de 49,2 L (con un pistón móvil) en el que se hallan 2 moles de un gas ideal ( $R = 0,082 \text{ atm.L}/(\text{mol.K})$ ) a presión de 1 atm. Asimismo, dentro del recipiente y en contacto térmico con el gas, se halla una delgada lámina de hierro cuyas dimensiones son de 41cm x 10cm. Se procede a comprimir adiabáticamente el gas, de manera que llega a ocupar un volumen de 30,55 L. Los procesos adiabáticos para gases ideales se caracterizan por cumplir la relación:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

donde  $T_1, V_1$  y  $T_2, V_2$  son la temperatura y el volumen al inicio y final de la evolución, respectivamente. La constante  $\gamma$  se la conoce como *coeficiente de adiabáticas* y depende del tipo de gas que se trate; para este problema, tomaremos que  $\gamma = 7/5$ . Una vez finalizado este proceso, sucederá que la lámina de hierro variará sus dimensiones (dilatación) debido a su cambio de temperatura según la ecuación:

$$\beta = \frac{\Delta A}{A_0 \Delta T}$$

siendo  $A_0$  el área inicial de la lámina,  $\Delta A$  la variación de área y  $\Delta T$  la variación de temperatura. El coeficiente  $\beta$  puede aproximarse por  $\beta \approx 2\alpha$ , donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación lineal térmica. Entonces, la variación de área que sufre la lámina de hierro ( $\alpha_{\text{Fe}} = 12 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ ) es, aproximadamente:

- a. 0,62 cm<sup>2</sup>
- b. 0,31 cm<sup>2</sup>
- c. 0,93 cm<sup>2</sup>
- d. 2,8 cm<sup>2</sup>
- e. 0,51 cm<sup>2</sup>

## Pregunta 10

Una manera de medir la temperatura de un gas es a través de la sensibilidad que tiene un conductor a la variación de su resistencia eléctrica respecto a la temperatura. En este caso, se tiene 3 moles de un gas ideal ( $R = 0,082 \text{ atm.L}/(\text{mol.K})$ ) encerrado en un recipiente de 73,31 L a presión de 1 atm. El recipiente cuenta con un pistón móvil. En contacto térmico con él, y conectado a una fuente de 1.8 V, se tiene un alambre de cobre ( $\rho_{\text{Cu}} = 1,7 \times 10^{-8} \Omega.\text{m}$ ) con una sección  $S = 0.1 \text{ mm}^2$  y  $L = 250 \text{ cm}$  de longitud. Puede hallarse la resistencia eléctrica  $R_0$  de este alambre mediante la expresión:

$$R_0 = \frac{\rho L}{S} \quad (5)$$

siendo  $\rho$  la resistencia específica del material. Se decide expandir isobáricamente el gas, de manera que se alcanza al final un volumen de 77 L. Esto provoca que el alambre varíe su temperatura junto al gas y, con ello, una variación en su resistencia eléctrica según la ecuación:

$$R = R_0(1 + \lambda\Delta T) \quad (6)$$

donde  $\lambda$  es el coeficiente de variación de resistencia en función de la temperatura ( $\lambda_{\text{Cu}} = 3,9 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$ ). La intensidad de corriente que pasa por el alambre al finalizar la experiencia es, aproximadamente:

- a. 2 A
- b. 2,5 A
- c. 3 A
- d. 3,5 A
- e. 4 A